Aula 5
Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Homogêneas.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Na aula de hoje iniciaremos o estudo das EDOs de ordem $n \geqslant 2$. Começaremos com as EDOs lineares de 2^a ordem.

Em geral, vamos assumir que uma EDO linear de 2^a ordem pode ser escrita como

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x), \tag{1}$$

em que A, B, C e F são funções contínuas em um intervalo aberto I.

Uma EDO linear de 2^a ordem também pode ser escrita como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{2}$$

dividindo (1) por $A(x)$.

Exemplo 1

A EDO

$$e^x y'' + \cos x y' + (1 + \sqrt{x})y = \tan^{-1} x,$$

é linear com

$$A(x) = e^x, \quad B(x) = \cos x, \quad C(x) = 1 + \sqrt{x} \;\text{ e }\; F(x) = \tan^{-1} x.$$

Exemplo 2

As EDOs

$$y'' = yy' \quad \text{e} \quad y'' + 3(y')^2 + 4y^3 = 0,$$

não são lineares.

Existência e Unicidade da Solução

Teorema 3 (Existência e Unicidade)

Se p, q e f são funções contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto a então, para quaisquer números b_0 e b_1', o problema de valor inicial (PVI)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = b_0 \quad e \quad y'(a) = b_1.$$

admite uma única solução em I.

Observação 1:

A solução de um PVI envolvendo uma EDO linear de 2^a ordem é determinada considerando duas condições iniciais!

Equações Homogêneas

Definição 4 (EDO Linear de 2^a Ordem Homogênea)

Uma EDO de 2^a ordem é homogênea se $F(x) = 0$ ou $f(x) = 0$, ou seja, pode ser escrita como

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \quad \text{ou} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Observação:

O termo "homogêneo" tem significado diferente para EDOs de 1^a ordem.

Princípio da Superposição

Teorema 5 (Princípio da Superposição)

Se y_1 e y_2 são ambas soluções de

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0,$$

em um intervalo I, então qualquer combinação linear

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

é também solução da EDO.

A demonstração será apresentada na aula!

Exemplo 6

Por inspeção, notamos que

$$y_1(x) = \cos x \quad \text{e} \quad y_2(x) = \operatorname{sen} x,$$

são ambas soluções da EDO homogênea

$$y'' + y = 0.$$

Pelo Teorema 5,

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x,$$

é também solução para quaisquer c_1 e c_2.

Exemplo 7

Sabendo que

$$y_1(x) = e^x \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^x,$$

são ambas soluções de

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

determine a solução da EDO que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 3 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1.$$

Exemplo 7

Sabendo que

$$y_1(x) = e^x \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^x,$$

são ambas soluções de

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

determine a solução da EDO que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 3 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1.$$

Resposta: A única solução do PVI é

$$y(x) = 3e^x - 2xe^x.$$

De um modo geral, suponha que

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

é uma solução de uma EDO linear de 2^a ordem homogênea.

Impondo as condições iniciais

$$y(a) = b_0 \quad \text{e} \quad y'(a) = b_1,$$

obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = b_0, \\ c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) = b_1, \end{cases}$$

nos coeficientes c_1 e c_2.

Equivalentemente, temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

Concluindo, considere o PVI

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(a) = b_0 \quad \text{e} \quad y'(a) = b_1,$$

em que p e q são funções contínuas em I.

Conhecendo soluções y_1 e y_2, conseguiremos determinar a única solução do PVI em I usando $y(x) = c_1 y_1(x) = c_2 y_2(x)$ se, e somente se, o sistema linear

$$\begin{bmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix},$$

admitir uma única solução.

Wronskiano

Em outras palavras, a expressão

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

pode ser usada para determinar a única solução do PVI

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(a) = b_0 \quad \text{e} \quad y'(a) = b_1,$$

para qualquer $a \in I$, se o determinante

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

chamado **wronskiano**, for diferente de zero para todo $x \in I$.

Observação

Se o wronskiano não se anula em nenhum ponto $x \in I$, então y_1 e y_2 são linearmente independentes em I.

Solução Geral

Teorema 8 (Solução Geral de uma EDO Homogênea)

Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes da EDO linear homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

em que p e q são ambas funções contínuas em um intervalo I, então qualquer outra solução da EDO pode ser escrita como

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

para c_1 e c_2 reais.

Equações de Ordem Superior

De um modo geral, uma EDO linear de ordem $n \geqslant 2$ pode ser escrita como

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = F(x),$$

ou, equivalentemente,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \qquad (3)$$

Teorema 9 (Existência e Unicidade)

Se $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e f são funções contínuas em um intervalo aberto I contendo um ponto a então, dados $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, a EDO (3) *admite uma única solução no intervalo I que satisfaz as condições iniciais*

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}.$$

Definição 10 (Equação Homogênea)

Uma EDO linear de ordem $n \geqslant 2$ é dita homogênea se pode ser escrita como

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0,$$

ou

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0.$$

Teorema 11 (Princípio da Superposição)

Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são n soluções de uma EDO linear homogênea de ordem $n \geqslant 2$, então

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

é também uma solução da EDO.

Definição 12 (Wronskiano)

O wronskiando de funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$, todas $n-1$ vezes diferenciáveis, é o determinante

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Observação:

As funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são linearmente independentes em um intervalo I se o wronskiano não se anula nesse intervalo.

Teorema 13 (Solução Geral)

Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções linearmente independentes da EDO linear homogênea

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

em que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são funções contínuas em um intervalo I, então qualquer outra solução da EDO pode ser escrita como

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_2(x),$$

para $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reais.

Equações com Coeficientes Constantes

Considere uma EDO linear homogênea de ordem $n \geqslant 2$ com coeficientes constantes:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Vamos buscar uma solução não-trivial na forma

$$y(x) = e^{rx}.$$

Note que a k-ésima derivada de y satisfaz

$$y^{(k)}(x) = r^k e^{rx} = r^k y(x).$$

Substituindo na EDO e simplificando, obtemos

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0,$$

chamada **equação característica** para a EDO.

Raízes Distintas da Equação Característica

Se r é uma solução da equação característica, então $y(x) = e^{rx}$ é uma solução da EDO.

Sobretudo, como $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$ possui n soluções $r_1, r_2, \ldots, r_n$, podemos expressar a solução geral da EDO como

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x},$$

desde que $r_i \neq r_j$ para todo $i \neq j$, ou seja, se não houverem raízes repetidas.

Exemplo 14

Encontre a solução geral de

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Exemplo 14

Encontre a solução geral de

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Resposta: A solução geral é

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Exemplo 15

Determine a solução do PVI

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3.$$

Exemplo 15

Determine a solução do PVI

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3.$$

Resposta: A solução do PVI é

$$y = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}.$$

Exemplo 16

Encontre a solução do PVI

$$y^{(3)} + 3y'' - 10y' = 0, \quad y(0) = 7, y'(0) = 0 \quad \text{e} \quad y''(0) = 70.$$

Obs: A solução de

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 7, \\ \quad\ - 5c_2 + 2c_3 = 0, \\ \quad\ + 25c_2 + 4c_3 = 70, \end{cases}$$

é $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ e $c_3 = 5$.

Exemplo 16

Encontre a solução do PVI

$$y^{(3)} + 3y'' - 10y' = 0, \quad y(0) = 7, y'(0) = 0 \quad \text{e} \quad y''(0) = 70.$$

Obs: A solução de

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 7, \\ \quad - 5c_2 + 2c_3 = 0, \\ \quad + 25c_2 + 4c_3 = 70, \end{cases}$$

é $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ e $c_3 = 5$.

Resposta: A solução do PVI é

$$y = 2e^{-5x} + 5e^{2x}.$$

Exemplo 17

Determine a solução geral de

$$y'' + 9y = 0.$$

Exemplo 17

Determine a solução geral de

$$y'' + 9y = 0.$$

Resposta: A solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x).$$

Raízes Complexas Distintas

Se r_1 e r_2 forem raízes complexas conjugadas, então

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - i\mu.$$

Usando a fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta,$$

podemos escrever a combinação linear

$$k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

de forma alternativa como

$$c_1 e^{\lambda x}\cos(\mu x) + c_2 e^{\lambda x}\,\text{sen}(\mu x).$$

Exemplo 18

Determine a solução geral da EDO

$$y'' + y' + y = 0.$$

Exemplo 18

Determine a solução geral da EDO

$$y'' + y' + y = 0.$$

Resposta: A solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$$

Exemplo 19

Encontre a solução do PVI

$$y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 5.$$

Exemplo 19

Encontre a solução do PVI

$$y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 5.$$

Resposta: A solução do PVI é

$$y(x) = e^{2x}\big(\cos x + 3\,\mathrm{sen}\,x\big).$$

Considerações Finais

Na aula de hoje iniciamos o estudo das EDOs de ordem $n \geqslant 2$. Especificamente, vimos:

- Enunciamos um teorema que garante a existência e unicidade da solução de um PVI.
- Comentamos sobre o princípio de superposição das soluções de uma EDO linear homogênea.
- Introduzimos o wronskiano e comentamos sua relação com a dependência linear de funções.
- Enunciamos um teorema sobre a solução geral.

Por fim, apresentamos uma técnica para resolver uma EDO homogênea com coeficientes constantes quando as raízes da equação características são todas distintas.